

Математична модель максимізації значення інтегрального індексу безпеки державного кордону

Mathematical model of maximizing the value of the integral index of state border security

Владислав Шевчук

Vladyslav Shevchuk

старший викладач кафедри прикордонної служби, e-mail: goal_keeper@ukr.net, ORCID: 0000-0001-5583-2160

Senior Lecturer of the Border Guard Service Department, e-mail: goal_keeper@ukr.net, ORCID: 0000-0001-5583-2160

Національна академія Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького, м. Хмельницький, Україна

Bohdan Khmelnytskyi National Academy of the State Border Guard Service of Ukraine, Khmelnytskyi, Ukraine

Received: July 30, 2025 | Revised: August 09, 2025 | Accepted: August 31, 2025

DOI: <https://doi.org/10.33445/sds.2025.15.4.3>

Мета роботи. Розробити оптимізаційну математичну модель максимізації значення інтегрального індексу безпеки державного кордону.

Метод дослідження. В основу моделі покладено інтегральний індекс безпеки державного кордону (ІІБ) як цільову функцію, яку необхідно максимізувати. Змінними в моделі виступають не самі показники, а керуючі впливи або ресурси, що спрямовуються на покращення цих показників.

Результати дослідження. Розроблено математичну модель максимізації значення інтегрального індексу безпеки державного кордону та реалізовано її у середовищі Matlab.

Теоретична цінність дослідження. Теоретично методика збагачує область математичного моделювання в системах безпеки, демонструючи, як оціночні індекси можна трансформувати в оптимізаційні задачі.

Оригінальність/Цінність дослідження. Новизна полягає у інтеграції оціночної моделі та агрегації цільової функції до специфічного індексу ІІБ з елементами математичного програмування для оптимального розподілу ресурсів у контексті безпеки державного кордону.

Майбутні дослідження. У ході подальших досліджень доцільно опрацювати вхідні дані та розробити програмний продукт для комп'ютерної підтримки.

Тип статті. Теоретична.

Purpose. To develop an optimization mathematical model for maximizing the value of the integral index of state border security.

Method. The model is based on the integral index of state border security (IBS) as an objective function that needs to be maximized. The variables in the model are not the indicators themselves, but the controlling influences or resources aimed at improving these indicators.

Findings. A mathematical model for maximizing the value of the integral security index of the state border was developed and implemented in the Matlab environment.

Theoretical implications. Theoretically, the methodology enriches the field of mathematical modeling in security systems by demonstrating how evaluation indices can be transformed into optimization problems.

Originality/Value. The novelty lies in the integration of the evaluation model and aggregation of the objective function to a specific IIB index with elements of mathematical programming for optimal resource allocation in the context of state border security.

Future research. In the course of further research, it is advisable to process the input data and develop a software product for computer support.

Paper type. Theoretical.

Ключові слова: управління, планування, прийняття рішення, моделювання, підрозділи охорони державного кордону, органи військового управління, оперативно-службова діяльність.

Key words: management, planning, decision-making, modeling, state border protection units, military command bodies, operational and service activities.

Вступ

Традиційні моделі оцінювання стану безпеки державного кордону, як правило, фокусуються на розрахунку поточного стану (наприклад, через індекси ризиків чи ефективності) та рідко включають динамічну оптимізацію під обмеженнями. У документі модель еволюціонує від статичної оцінки до динамічної оптимізації, що дозволяє не лише діагностувати, а й прогнозувати та коригувати рівень безпеки через керуючі впливи (ресурси (X_k)). Більшість відомих моделей оптимізації безпеки кордонів (наприклад, стратегія оптимізації ресурсів СВР США, яка фокусується на штатному персоналі та інфраструктурі, або multi-objective моделі для патрулювання кордонів з використанням теорії ігор) не інтегрують вагові коефіцієнти з нелінійними функціональними залежностями ресурсів від показників. Запропонована модель вводить саме такі залежності ($(P_i = f(X_k))$), що враховують ефект насичення та базуються на реальних даних чи симуляціях, роблячи її більш гнучкою для нелінійних сценаріїв.

У вітчизняній науковій літературі (Андрощук О., Грінченко В. 2021), (Bratko A. та інші, 2021), (Kosevtsov V. та інші 2020), (Братко А. 2023), (Михайлюк Ю. О., Башнянин О. В. 2024) переважають моделі оцінки ризиків (наприклад, моделі протидії контрабандної діяльності чи нелегальної міграції), але рідко зустрічаються комплексні оптимізуючі моделі для ІІБ. Новизна в тому, що методика поєднує експертні ваги (метод аналізу ієрархій) з обмеженнями ресурсів, адаптуючи загальні принципи математичного моделювання до специфіки прикордонної служби України, де ресурси обмежені через геополітичні виклики.

Гібридний підхід надає можливості поєднання статистичних, експертних і симуляційних методів для побудови залежностей робить модель новаторською порівняно з чисто лінійними моделями (наприклад, в оптимізації екосистемних послуг кордонів чи чергової теорії для імміграційного контролю).

Ця новизна обґрунтована відсутністю прямих аналогів у науковій літературі, де оптимізація часто обмежується окремими аспектами (наприклад, патрулюванням чи наявними ресурсами), а не комплексним індексом безпеки.

Теоретичні основи дослідження

Теоретично методика збагачує область математичного моделювання в системах безпеки, демонструючи, як оціночні індекси можна трансформувати в оптимізуючі задачі. Вона розвиває теорію багатокритеріальної оптимізації, інтегруючи вагові коефіцієнти з нелінійними залежностями, що дозволяє враховувати стратегічні пріоритети та ефекти насичення. Це сприяє розвитку теорії прийняття рішень під невизначеністю, особливо в умовах обмежених ресурсів, і може бути узагальнено на інші сфери (наприклад, фінансову чи економічну безпеку). Методика також підкреслює роль гібридних методів (статистика + експертиза + симуляція) для побудови реалістичних моделей, що є внеском у теорію системного аналізу.

Постановка проблеми

Існує потреба у створенні моделі, яка є інструментом для ефективного управління ресурсами в органах та підрозділах охорони державного кордону, дозволяючи обґрунтувати пріоритети фінансування (наприклад, інвестиції в технічні засоби охорони державного кордону та підготовку особового складу), яка б допомогла мінімізувати ризики порушень державного кордону, підвищити оперативність реагування в умовах ускладнення обстановки та оптимізувати бюджетні витрати.

Результати

На основі методики оцінювання стану обстановки на ділянці відповідальності підрозділів охорони державного кордону в умовах її ускладнення, яка описує порядок оцінки стану безпеки кордону, розроблено оптимізаційну математичну модель, мета якої визначити, як найкраще розподілити ресурси для максимізації значення інтегрального індексу безпеки кордону (ІІБ).

Концепція оптимізаційної моделі.

Оптимізаційна модель використовує розрахований Інтегральний індекс безпеки кордону (ІІБ) як цільову функцію, яку необхідно максимізувати. Змінними в моделі виступають не самі показники, а керуючі впливи або ресурси, що спрямовуються на покращення цих показників.

Мета: максимізувати ІІБ за умов обмежених ресурсів:

$$\text{ІІБ} = w_{\text{упр}} \cdot E_{\text{упр}} + w_{\text{оп}} \cdot E_{\text{оп}} \quad (1)$$

Формулювання оптимізаційної моделі.

1. Цільова функція.

Цільова функція повністю базується на моделі. Ми прагнемо максимізувати зважену суму ефективностей:

$$\max(\PiБ) = w_{\text{упр}} \cdot (\sum_{i=1}^n w_i \cdot P_i^{\text{БН}}) + w_{\text{оп}} \cdot (\sum_{j=1}^m w_j \cdot P_j^{\text{ЗОВН}}), \quad (2)$$

де $\{w_{\text{упр}}, w_{\text{оп}}, w_i, w_j\}$ – вагові коефіцієнти, які вважаються константами на етапі оптимізації. Вони визначаються експертно (наприклад, методом аналізу ієрархій) і відображають стратегічні пріоритети.

2. Змінні (керуючі впливи).

Введемо змінні, що позначають обсяг ресурсів, які виділяються на кожен напрямок діяльності. Наприклад:

X_1 – ресурси (наприклад, людино-години, фінанси), виділені на прискорення процесу прийняття рішень (впливає на P_1);

X_2 – ресурси на підвищення кваліфікації аналітиків та планувальників (впливає на P_2);

X_3 – ресурси на закупівлю та використання технічних засобів спостереження (впливає на P_3);

X_4 – ресурси на оснащення груп швидкого реагування (впливає на P_4).

3. Функціональні залежності.

Це найважливіший крок: необхідно встановити, як виділені ресурси (X_k) впливають на значення часткових показників (P_i). Ці залежності, $P_i = f(X_k)$, є основою моделі і можуть бути визначені на основі: статистичного аналізу попередніх періодів; експертних оцінок; результатів імітаційного моделювання.

Приклади залежностей:

Для P_1 (оперативність прийняття рішення) – збільшення ресурсів X_1 на автоматизацію може скорочувати $T_{\text{факт}}$. Залежність може бути нелінійною (ефект насичення).

$$P_1(X_1) = 1 - \frac{T_{\text{факт базовий}} - \Delta T(X_1)}{T_{\text{норм}}}, \quad (3)$$

де $\Delta T(X_1)$ – скорочення часу завдяки ресурсам X_1 .

Для P_3 (результативність протидії): Збільшення ресурсів X_3 на дрони та камери підвищує кількість виявлених порушень $N_{\text{вияв}}$.

$$P_3(X_3) = \frac{N_{\text{вияв базовий}} + \Delta N(X_3)}{N_{\text{спроб}}}, \quad (4)$$

де $\Delta N(X_3)$ – додаткові виявлення завдяки ресурсам X_3 .

4. Обмеження.

Будь-яка система діє в умовах обмежених ресурсів.

Бюджетне обмеження. Сума всіх виділених ресурсів не може перевищувати загальний бюджет B .

$$\sum_{k=1}^K c_k X_k \leq B, \quad (5)$$

де c_k – вартість одиниці ресурсу X_k .

Обмеження за персоналом. Загальна кількість залучених співробітників не може перевищувати штатну чисельність L .

$$\sum_{k=1}^K l_k X_k \leq L, \quad (6)$$

де l_k – кількість персоналу, необхідна для одиниці ресурсу X_k .

Технологічні обмеження. Наприклад, неможливо закупити більше дронів, ніж доступно на ринку.

Етапи практичної реалізації

1. Ідентифікація показників та ресурсів. Скласти повний перелік часткових показників (P_i), які використовуються в моделі, та визначити, які конкретні ресурси або заходи (X_k) на них впливають.

2. Визначення вагових коефіцієнтів. За допомогою експертних методів (наприклад, метод аналізу ієрархій, як зазначено в документі) встановити всі ваги (w).

3. Побудова функціональних залежностей. Зібрати дані та/або залучити експертів для математичного опису залежностей $P_i = f(X_k)$. Це найскладніший етап, що потребує ретельного аналізу.

4. Формулювання обмежень. Чітко визначити кількісні обмеження (бюджет, наявний персонал, часові рамки).

5. Розв'язання задачі. Використовувати спеціалізоване програмне забезпечення для математичного програмування (лінійного або нелінійного, залежно від виду функцій $f(X_k)$) для знаходження оптимального розподілу ресурсів X_k , що максимізує ІІБ.

Аналіз результатів. Ідентифікація показників і ресурсів, визначення ваг, побудова залежностей, формулювання обмежень, розв'язання задачі (за допомогою ПО для математичного програмування) та аналіз результатів.

6. Проаналізувати отриманий оптимальний план розподілу ресурсів та розробити на його основі конкретні управлінські рішення.

Перевага такого підходу полягає в тому, що він перетворює модель з інструменту оцінки в інструмент підтримки прийняття рішень, дозволяючи об'єктивно та кількісно обґрунтовувати пріоритетність фінансування тих чи інших напрямків для найбільш ефективного підвищення безпеки кордону.

Модель орієнтована на стратегічні пріоритети, дозволяючи об'єктивно обґрунтувати інвестиції в напрямки, що дають максимальний ефект для підвищення безпеки кордону.

Математична модель максимізації значення інтегрального індексу безпеки державного кордону реалізована у середовищі Matlab. Приклади розрахунків наведено на рисунках 1–3.

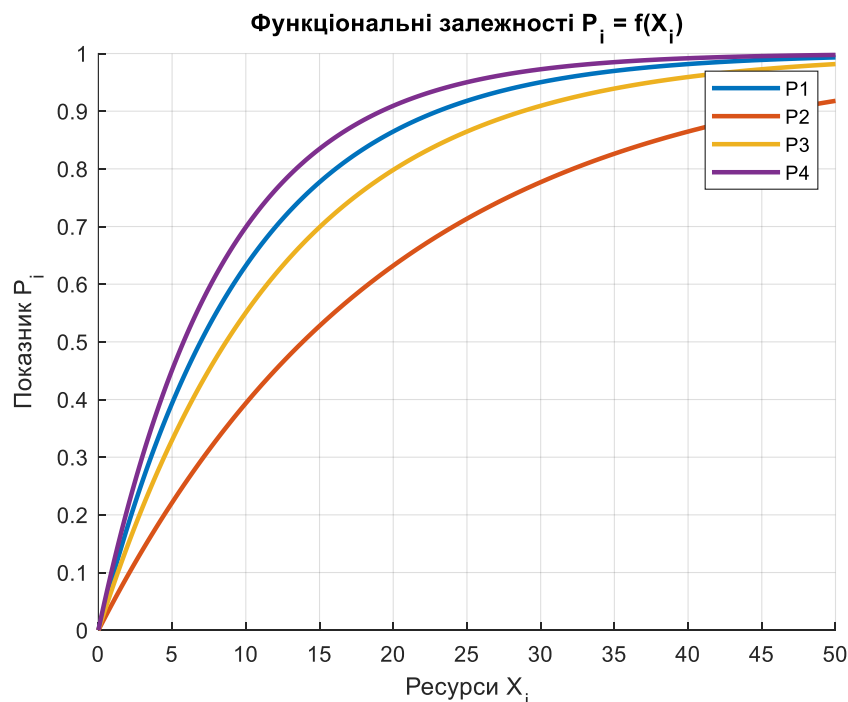
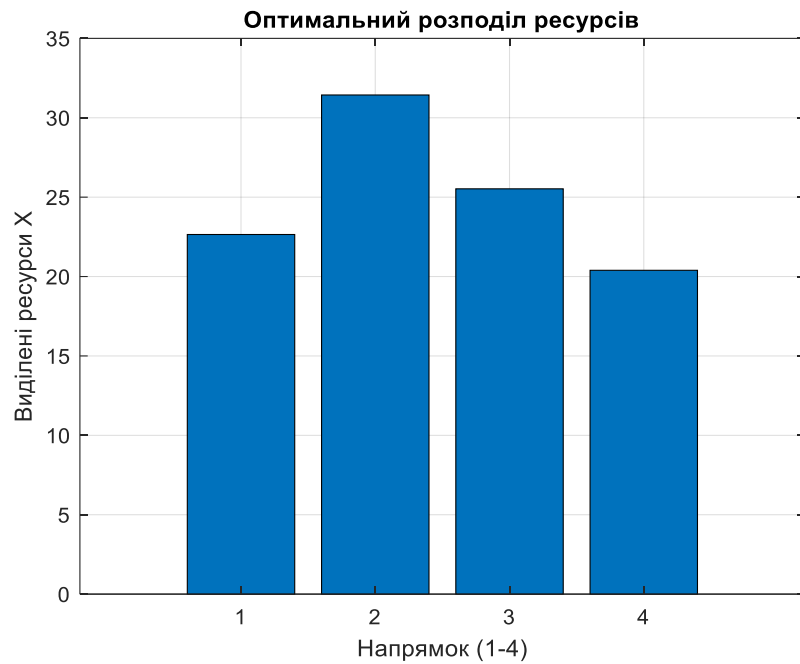
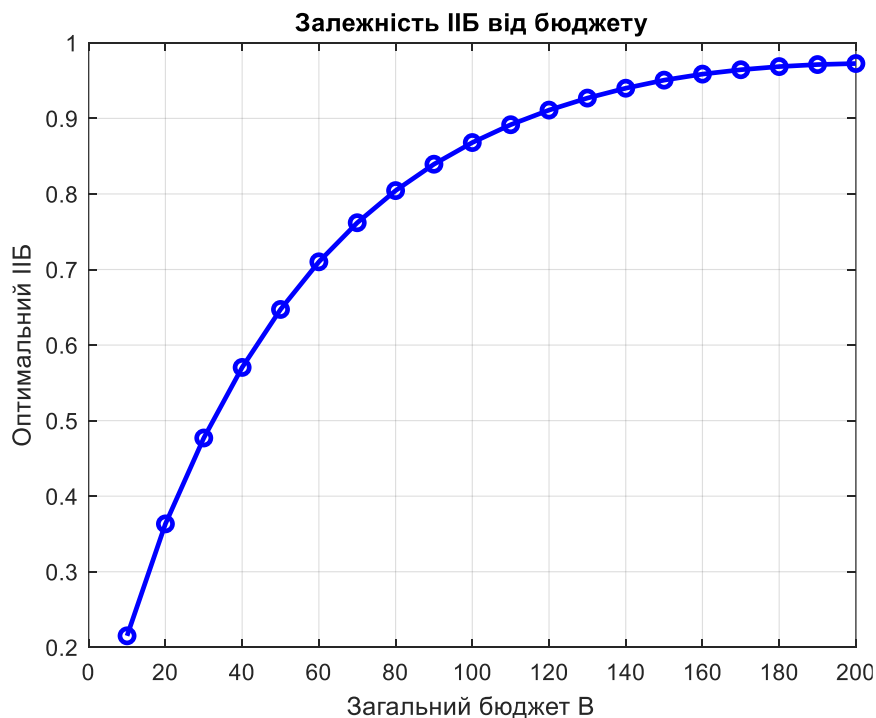


Рисунок 1 – Функціональні залежності показників та ресурсів

Джерело: розроблено автором у Matlab

**Рисунок 2 – Оптимальний розподіл ресурсів***Джерело:* розроблено автором у Matlab**Рисунок 3 – Оптимальний розподіл ресурсів***Джерело:* розроблено автором у Matlab

Рекомендації щодо використання.

1. Рекомендується впровадити модель у Державній прикордонній службі України для щорічного планування оперативно-службової діяльності органів та підрозділів охорони державного кордону. Почати з пілотного проекту на конкретній ділянці державного кордону, використовуючи реальні дані для калібрування залежностей $(f(X_k))$.

2. Перед використанням провести статистичний аналіз даних про порушення кордону у минулому та ефективність заходів протидії, а також залучити експертів для визначення ваги і залежностей.

3. Враховувати нелінійність залежностей, тестуючи модель на симуляціях. Якщо обмеження складні, перейти від лінійного до нелінійного програмування.

4. Регулярно оновлювати ваги та залежності на основі нових даних (наприклад, щоквартально). Інтегрувати з GIS-системами для геопросторового аналізу.

5. Проводити тренінги для представників інформаційно-аналітичного забезпечення прикордонної служби з методів оптимізації, щоб забезпечити коректне застосування.

6. Уникати надмірної залежності від експертних оцінок; комбінувати з об'єктивними даними. Якщо ресурси обмежені, почати зі спрощеної версії моделі (лише ключові (X_k)).

Загалом, методика має високий потенціал для підвищення ефективності безпеки державного кордону, але вимагає якісних вхідних даних і комп'ютерної підтримки.

Висновки

Таким чином, розроблена модель є інструментом для ефективного управління ресурсами в органах та підрозділах охорони державного кордону, дозволяючи обґрунтувати пріоритети фінансування (наприклад, інвестиції в технічні засоби охорони державного кордону та підготовку особового складу). Вона допомагає мінімізувати ризики порушень державного кордону, підвищувати оперативність реагування в умовах ускладнення обстановки та оптимізувати бюджет. У контексті України це особливо актуально для посилення безпеки на державному кордоні, в умовах обмеженого фінансування та обмежених ресурсів. Модель надає можливість оптимізувати людські (особового складу) та інженерно-технічні ресурси при проведенні спеціальних заходів (дій) щодо пошуку правопорушників чи плануванні оперативно-службової діяльності у наступному календарному році або іншому періоді). Модель може інтегруватися в системи підтримки прийняття управлінських рішень, зменшуючи суб'єктивність і підвищуючи ефективність на 10–20% (за аналогією з подібними моделями в СППР). Практичне значення також у можливості симуляції сценаріїв (наприклад, що якщо збільшити бюджет на 10%), що полегшує планування. Математична модель є одним із етапів моделі застосування підрозділів охорони державного кордону в умовах ускладнення обстановки.

Фінансування

Це дослідження не отримало конкретної фінансової підтримки.

Конкуруючі інтереси

Автори заявляють, що у них немає конкуруючих інтересів.

Список використаних джерел

- Андрощук О. С., Грінченко В. В. Розробка аналітичного методу аналізу ефективності охорони державного кордону із застосуванням ймовірнісно-статистичного підходу. *Information Processing Systems*. 2021. № 1(164). С. 6–11.
- Bratko A., Bereziuk V., Shevchenko A., Kubetsky Ya., Didyk V., Serkhovets S. Application of simulation modeling means in management decisions-making within the security and defense sector. *Emerging Science Journal*. 2021. Vol. 5, №. 4. P. 521–532. <http://dx.doi.org/10.28991/esj-2021-01294>
- Братко А. В. Методика організації роботи органів управління Державної прикордонної служби України щодо планування оперативно-службової діяльності. *Social development and Security*. 2023. Vol. 13, №. 1. P. 29–37. <https://doi.org/10.33445/sds.2023.13.1.4>

- Kosevtsov V., Telelim M., Lobanov A., Punda Yu. Development and Implementation of the Target Function in the Decision-Making Process in the System of Providing the Military Security of the State. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. № 5 (3(107)). P. 17–23.
- Михайлюк, Ю., & Башнянин, О. (2024). Науково-методичний апарат протидії нелегальній міграції на ділянці відповідальності прикордонного загону. *Social Development and Security*, 14(5), 37-42. <https://doi.org/10.33445/sds.2024.14.5.4>.

References

- Androshchuk O. S., Hrinchenko V. V. Rozrobka analitychnoho metodu analizu efektyvnosti okhorony derzhavnogo kordonu iz zastosuvannyam ymovirnisno-statystychnoho pidkhodu. *Information Processing Systems*. 2021. № 1(164). S. 6–11.
- Bratko A., Bereziuk V., Shevchenko A., Kubetsky Ya., Didyk V., Serkhovets S. Application of simulation modeling means in management decisions-making within the security and defense sector. *Emerging Science Journal*. 2021. Vol. 5, №. 4. R. 521–532. <http://dx.doi.org/10.28991/esj-2021-01294>
- Bratko, A. (2023). The method of organizing the work of the management bodies of the State Border Guard Service of Ukraine regarding the planning of operational and service activities. *Social Development and Security*, 13(1), 29-37. <https://doi.org/10.33445/sds.2023.13.1.4>.
- Kosevtsov V., Telelim M., Lobanov A., Punda Yu. Development and Implementation of the Target Function in the Decision-Making Process in the System of Providing the Military Security of the State. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. № 5 (3(107)). P. 17–23.
- MykhailiukY., & Bashnianyn, O. (2024). The scientific and methodical apparatus for combating illegal migration in the area of responsibility of the border detachment. *Social Development and Security*, 14(5), 37-42. <https://doi.org/10.33445/sds.2024.14.5.4>.